Introduction à la dynamique des populations. Modélisation, analyse, simulation

Parrainage
Lycée Jules Siegfried - Universites Le Havre Normandie
un chercheur, un enseignant, une classe

? ? ? - ? ? ? - ? ? ? - ? ? ?
David DEBAIN - Alexandre DESLANDES
Martin CADIVEL

Lycée Jules Siegfried
LMAH, UFR Sciences et Techniques, Université Le Havre Normandie

23 mai 2022

Plan de la présentations

Population du Japon entre 1900 et 2010

- Population donnée en millions d'habitants
- tous les cinq ans de 1900 à 2010
- 23 données

année	1900	1905	1910	1915	1920	1925	1930	1935
population	44,8	47	50,7	53,4	55,9	59,7	64,5	69,3

année	1940	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975
population	73,1	72,4	83,6	87,9	92,5	98,8	104,7	111,9

année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
population	116,8	120,8	123,5	125,6	126,9	127,4	128,6

Implémentation

Les listes pour enregistrer ces données :

- annees=[1900 1905 1910 . . . 2005 2010]
- mapop : la population étudiée pour l'année annees[k]

```
>>>
>>> annees
[1900, 1905, 1910, 1915, 1920, 1925, 1930, 1935, 1940, 1945, 1950, 1955, 1960, 1
965, 1970, 1975, 1980, 1985, 1990, 1995, 2000, 2005, 2010]
>>> annees[0]
1900
>>> annees[2]
1910
>>> len(annees)
23
>>> annees[22]
2010
>>>
>>> mapop
[44.8, 47, 50.7, 53.4, 55.9, 59.7, 64.5, 69.3, 73.1, 72.4, 83.6, 87.9, 92.5, 98.
8, 104.7, 111.9, 116.8, 120.8, 123.5, 125.6, 126.9, 127.4, 128.6]
>>> len(mapop)
23
>>> |
```

La fonction popJ()

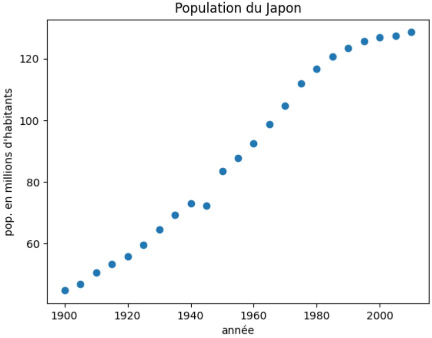
Permet de ne pas avoir à saisir à chaque fois ces données :

- aucun argument en entrées
- en sortie, deux listes :
  - la première : liste des années
  - la seconde : liste des populations

```
def popJ() :
    a=list(range(1900,2015,5))
    p=[44.8,47,50.7,53.4,55.9,\
        59.7 , 64.5 , 69.3 , 73.1 , 72.4,\
        83.6 , 87.9 , 92.5 , 98.8 , 104.7,\
        111.9 , 116.8 , 120.8 , 123.5 , 125.6,\
        126.9 , 127.4 , 128.6]

    return a,p
```

```
>>> annees,mapop=popJ()
>>> annees
[1900, 1905, 1910, 1915, 1920, 1925, 1930, 1935, 1940, 1945, 1950, 1955, 1960, 1
965, 1970, 1975, 1980, 1985, 1990, 1995, 2000, 2005, 2010]
>>> mapop
[44.8, 47, 50.7, 53.4, 55.9, 59.7, 64.5, 69.3, 73.1, 72.4, 83.6, 87.9, 92.5, 98.
8, 104.7, 111.9, 116.8, 120.8, 123.5, 125.6, 126.9, 127.4, 128.6]
>>> |
```

 # pour afficher les points...
plt.title('Population du Japon')
plt.xlabel('année')
plt.ylabel('pop. en millions d'habitants')
plt.scatter(annees,mapop) # pour avoir un graphique sous forme de nuage de points
plt.savefig("graphique_popJap.png")



Le modèle de Matlhus ou modèle de croissance exponentielle

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad U_{k+1} = rU_k \end{cases}$$

- taux d'accroissement constant : r
- population à l'instant initiale t_0 : U_0
- population à l'instant t_k : U_k

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad U_k = r^k U_0$$

- suite géométrique de raison r

Hypothèses

- La variation de la population ne dépend que des naissances et des décès : pas de migrations
  - b_k : taux de natalité sur la période k(entre les instants t_k et t_{k+1})
  - d_k : taux de mortalité sur la période k

$$U_{k+1} - U_k = (b_k - d_k)U_k$$

- Les taux sont constants et ne dépendent pas de k :
  - b : taux de natalité
  - d : taux de mortalité
  - $r = 1 - b + d$: taux d'accroissement

$$U_{k+1} = \underbrace{(1 - b + d)}_{r} U_k = rU_k$$

Analyse

$$\text{pour tout } k \geq 0 \qquad U_k = r^k U_0$$

- si $r > 1$

$$\lim_{k \to +\infty} r^k = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} U_k = +\infty$$

- si $r = 1$ pour tout $k \geq 0$

$$r^k = 1 \quad \text{et} \quad U_k = U_0$$

- si $r < 1$,

$$\lim_{k \to +\infty} r^k = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} U_k = 0$$

Synthèse

$$\text{pour tout } k \geq 0 \qquad U_k = r^k U_0 \quad \text{avec} \quad U_0 > 0.$$

- Ce modèle ne décrit que 3 comportements possibles
  - si $r > 1$ $\lim_{k \to +\infty} U_k = +\infty$: la population croît à l'infini ;
  - si $r = 1$ pour tout $k \geq 0$, $U_k = U_0$: population constante ;
  - si $r < 1$ $\lim_{k \to +\infty} U_k = 0$: la population s'éteint.
- Ne permet pas de décrire des populations dont la croissance varie (croit puis décroit ou l'inverse)
- Peut servir à décrire la dynamique d'une population sur une période sur laquelle les taux de natalité et de mortalité sont sensiblement constants

Calcul de la liste des raisons

- $r_k = \frac{U_{k+1}}{U_k}$
- calcul la liste $[r_0, \ldots, r_{N-1}]$: $\rightarrow$ fonction
  - entrée une liste (représente les éffectis d'une population) $[U_0, \ldots, U_N]$
  - en sortie la liste des différents rapport $[\frac{U_1}{U_0}, \frac{U_2}{U_1}, \ldots, \frac{U_n}{U_{n-1}}]$
  - exemple : si en entrée on a $[U_0, U_1, U_2]$, en sortie on aura $[\frac{U_1}{U_0}, \frac{U_2}{U_3}]$

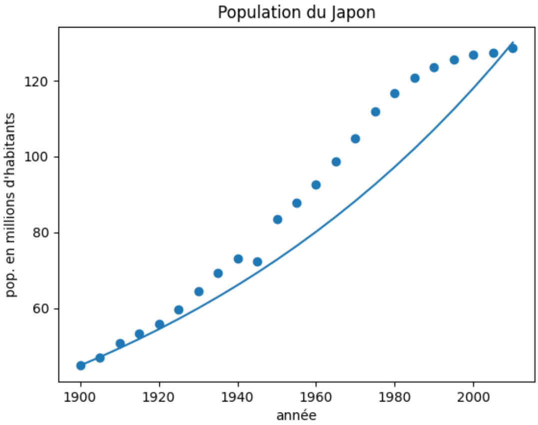
```
def calcQ(x) :
    resu=[]
    i=1
    while i<len(x) :
        resu.append(x[i]/x[i-1])
        i=i+1

    return resu
```

Calculs de la raison théorique

- $r =$ moyenne des $(r_k)_{0 \leq k \leq N-1}$.
- fonction qui calcul la moyenne.

Un premier résultat

- Afficher sur un même graphique les données du japon et la population théorique calculée.



Un meilleur résultat

- Le japon présente une croissance exponentielle jusqu'aux années 1980