Modéliser avec des fonctions affines – fiche 1

Exercice 1

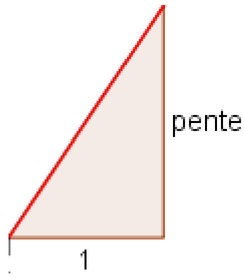
Ce panneau routier indique une descente dont la pente est 10 %. Cela signifie que pour un déplacement horizontal de 100 mètres, le dénivelé est de 10 mètres. Le schéma n'est pas à l'échelle mais illustre la situation.

1) Sur un papier quadrillé, représenter une pente de 10 % .
Attention : sur ce panneau, la voiture descend. En mathématique, on définit généralement le sens croissant de la gauche vers la droite, et donc pour représenter cette pente on le fera dans ce sens, comme si on était dans une montée.
2) Dans certains pays, il arrive parfois que la pente d'une route ne soit pas donnée par un pourcentage, mais par une indication telle que « 1 : 5 » . C'est un ratio : il veut dire que pour un déplacement horizontal de 5 mètres, le dénivelé est de 1 mètre. Déterminer si elle est supérieure ou inférieure à une pente de 15 %.
3) En utilisant un quadrillage, représenter en vraie grandeur ces deux pentes.

Rappel : la pente d'une droite est une grandeur quotient. C'est le rapport entre le **déplacement vertical** (souvent noté Δy) et le **déplacement horizontal** (souvent noté Δx). On a donc $pente=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Exemple : représenter une pente de $\dfrac{3}{5}$.

$pente=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{3}{5}=0{,}6=\dfrac{0{,}6}{1}$.



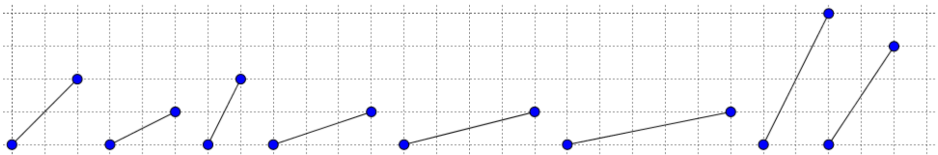
Cas particulier : si $\Delta x=1$ alors la pente est Δy

Attention : pour représenter une pente, il faut tenir compte des unités en abscisse et en ordonnée.

Exercice 2

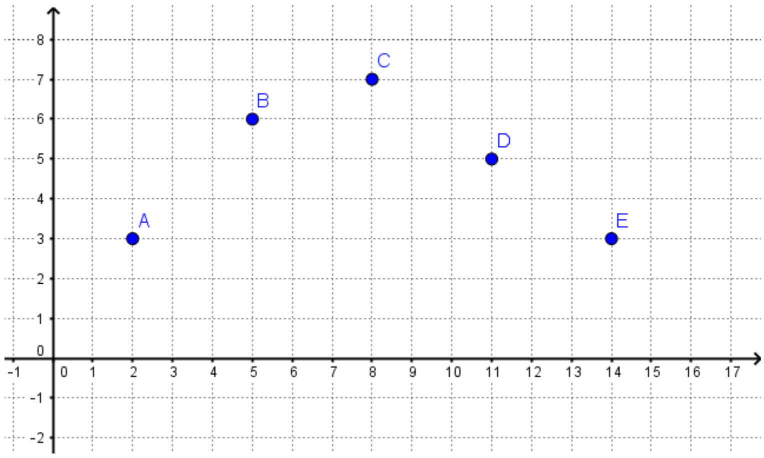
Sur le schéma ci-dessous, on a tracé des segments de droites dans un quadrillage « carré ».

En vous aidant du quadrillage, donnez la pente de chacun des segments de droites ci-dessous. Donner le résultat sous la forme d'une fraction, puis d'un nombre décimal, puis d'un pourcentage.



Exercice 3

On donne les points A, B, C, D et E.
1) Tracer la droite passant par A et de pente 2.
2) Tracer la droite passant par B et de pente 1.
3) Tracer la droite passant par C et de pente -0,5.
4) Tracer la droite passant par D et de pente -1.
5) Tracer la droite passant par E et de pente $\dfrac{-1}{3}$.



Propriété
► si on connaît les coordonnées de deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors la pente de la droite est donné par la formule : $pente=\dfrac{y_B-y_A=\Delta y}{x_B-x_A=\Delta x}$.
► si la pente est positive, alors la droite « monte » de la gauche vers la droite, sinon elle « descend » .

Exercice 4

Déterminer pour chaque question la pente de la droite (AB). Si besoin faire un schéma pour vérifier le résultat.
1) Avec les points $A(1;2)$ et $B(9;5)$.
2) Avec les points $A(-2;3)$ et $B(5;-1)$.
3) Avec les points $A(4;-2)$ et $B(-6;-5)$.
4) Avec les points $A(-4;-2)$ et $B(-6;-5)$.

Modéliser avec des fonctions affines – fiche 2

Définition
On appelle **fonction affine** toute fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, de la forme : $f(x)=mx+p$,
où « m » et « p » sont deux nombres réels constants.
Le nombre « m » est appelé le **coefficient directeur** ou la **pente** de la droite qui représente f .
Le nombre « p » s'appelle l'**ordonnée à l'origine** de la droite qui représente f .

Exemples :
Pour la fonction $f(x)=4x$, c'est …….. qui joue le rôle de « m » et ……… qui joue le rôle de « p ».
Pour la fonction $g(x)=-3x+5$, c'est …….. qui joue le rôle de « m » et ……… qui joue le rôle de « p ».

Exercice : déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des fonctions.

$f_1(x)=-2x+3$	$f_2(x)=-2$	$f_3(x)=x+4$
$f_4(x)=-3-4x$	$f_5(x)=3x$	$f_6(x)=2-x$

Propriété
Un tableau de valeur d'une fonction affine se caractérise par des **accroissements constants**, c'est à dire que si les antécédents ont des **différences constantes**, alors les images aussi.

Exemple : compléter les tableaux de valeurs des fonctions f et g et visualiser les accroissements constants.

x	0	1	2	3
$f(x)$				

x	0	1	2	3
$g(x)$				

Propriété
La courbe représentative d'une fonction affine est une **droite,** c'est à dire que tous les points de la représentation sont **alignés**. C'est une conséquence des accroissements constants.

Cas particulier
Une fonction affine pour laquelle $p=0$ est appelée **fonction linéaire,** elle est de la forme : $f(x)=mx$,
où « m » est un nombre réel constant. Une fonction linéaire correspond à une situation de **proportionnalité**.
La courbe représentative d'une fonction linéaire est une **droite** qui passe par **l'origine** du repère.
La fonction $f(x)=4x$ est un exemple de fonction linéaire.

Visualisation de m et p :
Pour toute fonction affine, l'image de 0 vaut $f(0)=m\times 0+p=p$, donc la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0\,;p)$. On en déduit qu'elle coupe l'axe des **ordonnées** au point d'ordonnée p .
La **pente** de la droite indique comment celle-ci évolue. Pour cela on se réfère à l'unité. Si on avance d'une unité horizontalement, alors la droite « monte » de m unité verticalement si $m>0$, ou « baisse » de m unité si $m<0$. C'est la conséquence des accroissements constants.

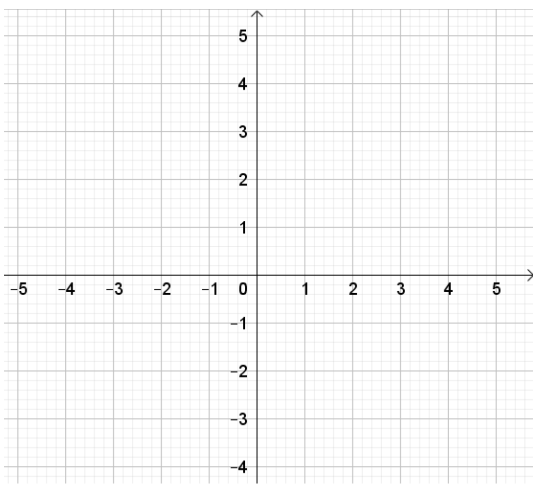
Exemple

Représenter ci-contre les fonctions f et g ,
et visualiser pour chacune les paramètres m et p .

Compléter

Pour f la pente est $m=\ldots..$ et l'ordonnée à l'origine est $p=\ldots..$

Pour g la pente est $m=\ldots..$ et l'ordonnée à l'origine est $p=\ldots..$



Modéliser avec des fonctions affines – fiche 3

Exercice 1 : représenter graphiquement une fonction affine donnée

Méthodologie : on place deux points ou bien on interprète graphiquement la pente et l'ordonnée à l'origine quand c'est possible. Si possible vérifier avec la calculatrice et son menu « fonction ».

Tracer dans le repère ci-dessous les représentations graphiques des fonctions affines suivantes :

$f_1(x)=2x+1$

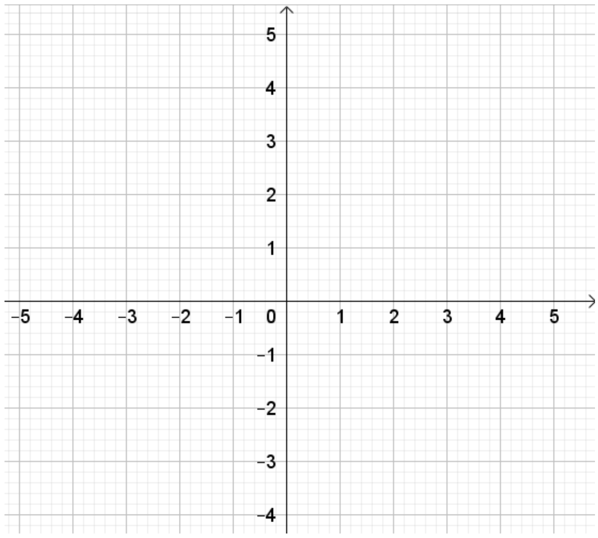
$f_2(x)=-0{,}5x+3$

$f_3(x)=-2$

$f_4(x)=0{,}25x+2$

$f_5(x)=\frac{1}{3}x$

$f_6(x)=-0{,}2x-3$



Exercice 2 : déterminer si une expression correspond à une fonction affine ou pas

Méthodologie : on développe et réduit l'expression algébrique, et on regarde si l'expression obtenue ou pas avec le modèle d'une fonction affine $f(x)=mx+p$.

Déterminer si les fonctions suivantes sont affines ou non en justifiant.

$$f_1(x)=(-2x+3)+(2-3x) \quad ; \quad f_2(x)=(-2x+3)-(2-3x)$$

$$f_3(x)=(-2x+3)(2-3x) \quad ; \quad f_4(x)=3x(-2x+3)-2x(2-3x)$$

Exercice 3 : déterminer si un point appartient ou pas à la droite représentative d'une fonction affine

Méthodologie : pour savoir si un point $M(x;y)$ *appartient ou pas à la courbe représentative d'une fonction* f *, on calcule* $f(x)$ *. Si* $f(x)=y$ *, alors le point M appartient à la courbe, sinon il n'appartient pas.*

On donne la fonction affine f définie par $f(x)=1{,}5x+3$, les points $A(2{,}2;6{,}3)$ et $B(-1{,}3;1)$.

1 ► Tracer dans un repère la fonction f , et placer les points A et B. Prendre comme unité graphique le cm.

2 ► Justifier si les points A et B appartiennent ou pas à la droite représentative de f .

Exercice 4 : déterminer graphiquement les paramètres d'une fonction affine

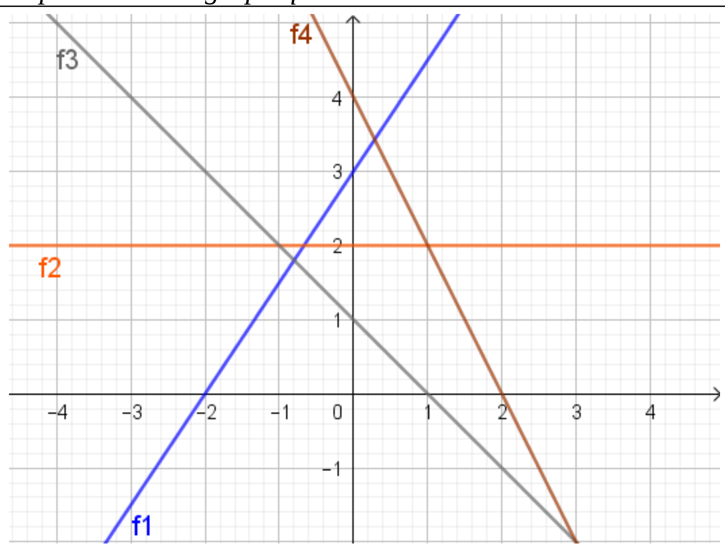
Méthodologie : aussi précisément que le permet le graphique, on détermine l'ordonnée à l'origine p *puis le coefficient directeur* m *en utilisant des points des représentations graphiques.*

Déterminer les expressions algébriques des fonctions affines

f_1 , f_2 , f_3 et f_4 .

Détailler la méthode.

Vérifier chacune de vos réponses avec le menu « fonction » de la calculatrice.



Modéliser avec des fonctions affines – fiche 4

Exercice 1 : déterminer si les représentations graphiques de deux fonctions affines sont sécantes ou pas, et trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

Méthodologie : pour savoir si les droites représentatives de deux fonctions affines sont sécantes, on compare les coefficients directeurs : s'il sont égaux, les droites sont parallèles, sinon elles sont sécantes. Alors pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on pose et résout l'équation : $f(x)=g(x)$ *pour trouver l'abscisse du point d'intersection, puis on détermine son ordonnée.*

On donne les fonctions affines f et g définies par $f(x)=2x-3$ et $g(x)=1{,}5x+1$.
1) Représenter f et g dans un même repère.
2) Montrer que les droites représentatives de f et g sont sécantes.
3) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. Vérifier graphiquement votre réponse.

Exercice 2 : déterminer la fonction affine dont la courbe représentative passe par deux points donnés

Méthodologie : on donne deux points $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$.
Pour déterminer les paramètres m *et* p *la fonction affine* $f(x)=m.x+p$ *, on déterminer le coefficient directeur* m *avec le calcul :* $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ *, puis on détermine l'ordonnée à l'origine* p *en posant et résolvant l'équation :* $y_A=m\times x_a+p$ *où l'inconnue est* p .

Pour les deux questions suivantes, représenter dans un même graphique les fonctions demandées.
1) Déterminer la fonction affine f dont la droite représentative passe par les points : $A(5{,}10)$ et $B(10{,}12)$.
2) Déterminer la fonction affine g de sorte que $g(-1)=2$ et $g(9)=8$.

Propriété : définir le sens de variation d'une fonction affine et dresser son tableau de variation

Soit f un fonction affine définie par $f(x)=mx+p$. Alors :

- si $m>0$ alors f est strictement **croissante sur** $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction définie par $f(x)=4x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	-∞	+∞
variations de $f(x)=4x$	$\nearrow$	

- si $m<0$ alors f est strictement **décroissante sur** $\mathbb{R}$

Exemple : la fonction définie par $f(x)=-3x+5$ décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	-∞	+∞
variations de $f(x)=-3x+30$	$\searrow$	

- Si $a=0$ alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction définie par $f(x)=5$ est constante sur $\mathbb{R}$.

x	-∞	+∞
$f(x)=5$	$\rightarrow$	

Application : pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, dresser en justifiant leur tableau de variation.

$f_1(x)=-2x+4$	$f_2(x)=\frac{1}{2}x-5$	$f_3(x)=-5$

<u>Exercice (modèle pour évaluation)</u>

Une expérience en chimie.
Au cours d'une réaction chimique, on suit la concentration en g/litre de deux produits A et B. Les mesures sont effectuées toutes les minutes. Le tableau ci-dessous regroupe les premiers résultats obtenus.
La début de l'expérience au moment $x=0$.
Malheureusement toutes les données n'ont pas été recopiées. Voici les données disponibles.

Temps (en minutes)	0	1	2	3	4	5
Concentration de A	16,3		15,9			15,3
Concentration de B		5,3			6,8	

1 ►
a. Placer les trois points correspondants à la concentration du produit A.
b. Démontrer que ces points sont alignés.
c. En supposant que la concentration du produit A décroît régulièrement au cours du temps (on dit aussi linéairement), compléter le tableau.
d. On appelle C_A la fonction qui à chaque instant t (en minutes) associe la concentration du produit A au cours du temps. Donner l'expression de $C_A(t)$.
e. Toujours en supposant que la concentration du produit A décroît régulièrement au cours du temps, déterminer à partir de quel moment le produit A aura disparu. Donner le résultat en heures, minutes et secondes.

2 ►
a. Placer les deux points correspondants à la concentration du produit B.
b. En supposant que la concentration du produit B croît régulièrement au cours du temps, compléter le tableau.
c. On appelle C_B la fonction qui à chaque instant t (en minutes) associe la concentration du produit B au cours du temps. Donner l'expression de $C_B(t)$.
d. Déterminer l'instant t à partir duquel la concentration de B dépassera celle de A. Arrondir le résultat à la seconde près.